

DTFT – dyskretno-czasowe przekształcenie
Fouriera (ang. *discrete-time Fourier transformation*)
sygnałów i systemów dyskretnych

SYGNAŁ

Przekształcenie proste

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad \text{DTFT wzór analizy}$$

Przekształcenie odwrotne – IDTFT (ang. *inverse DTFT*)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad \text{IDTFT wzór syntezy}$$

Warunki zbieżności – istnienia – DTFT (dostateczne)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{bezwzględna sumowalność ciągu } x[n] - \text{zbieżność jednostajna}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad \text{ograniczona energia – zbieżność w sensie średniokwadratowym tzn.}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n}$$

E to energia sygnału $x[n]$

Przykład.

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] = \{1, -1\}$$

$$X(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta[n] - \delta[n-1]) e^{-j\omega n}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} = 2je^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) / 2j = \\ &= 2je^{-j\omega/2} \sin(\omega/2) \end{aligned}$$

$$X(z) = 1 - z^{-1}, \quad |z| > 0$$

Związek DTFT z transformatą Z

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Przykład.

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1/(2j)}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})/(2j)} = \frac{e^{j\omega/2}}{2j \sin(\omega/2)}$$

Widmo sygnału dyskretnego $x[n]$

$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg X(e^{j\omega})}$ widmo zespolone – postać biegunowa

$A_x(\omega) = |X(e^{j\omega})|$ widmo amplitudowe

$\varphi_x(\omega) = \arg X(e^{j\omega})$ widmo fazowe

wszędzie zakres podstawowy pulsacji – okrąg

$$-\pi \leq \omega < \pi$$

A dalej widmo powtarza się okresowo z okresem 2π na osi ω .

Charakterystyki częstotliwościowe systemu dyskretnego $h[n]$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg H(e^{j\omega})} \quad \text{charakterystyka zespolona}$$

$$A_h(\omega) = |H(e^{j\omega})| \quad \text{charakterystyka amplitudowa}$$

$$\varphi_h(\omega) = \arg H(e^{j\omega}) \quad \text{charakterystyka fazowa}$$

$$\tau_g(\omega) = - \frac{d[\arg H(e^{j\omega})]}{d\omega} \quad \begin{array}{l} \text{charakterystyka opóźnieniowa} \\ \text{– opóźnienie grupowe} \end{array}$$

$$\tau_p(\omega) = - \frac{\arg H(e^{j\omega})}{\omega} \quad \begin{array}{l} \text{charakterystyka opóźnieniowa} \\ \text{– opóźnienie fazowe} \end{array}$$

Przykład. Rozważmy systemy DLS: minimalno-fazowy i odpowiadający mu maksymalno-fazowy, o transmitancjach

$$H_1(z) = \frac{z+b}{z+a}, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1, \quad |z| > |a|$$

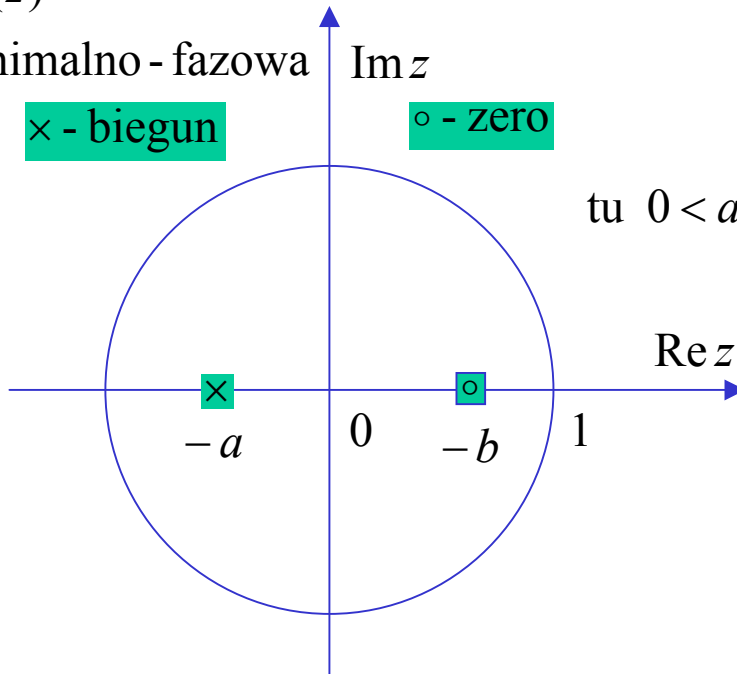
$$H_2(z) = \frac{bz+1}{z+a}, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1, \quad |z| > |a|$$

$H_1(z)$

minimalno - fazowa

× - biegun

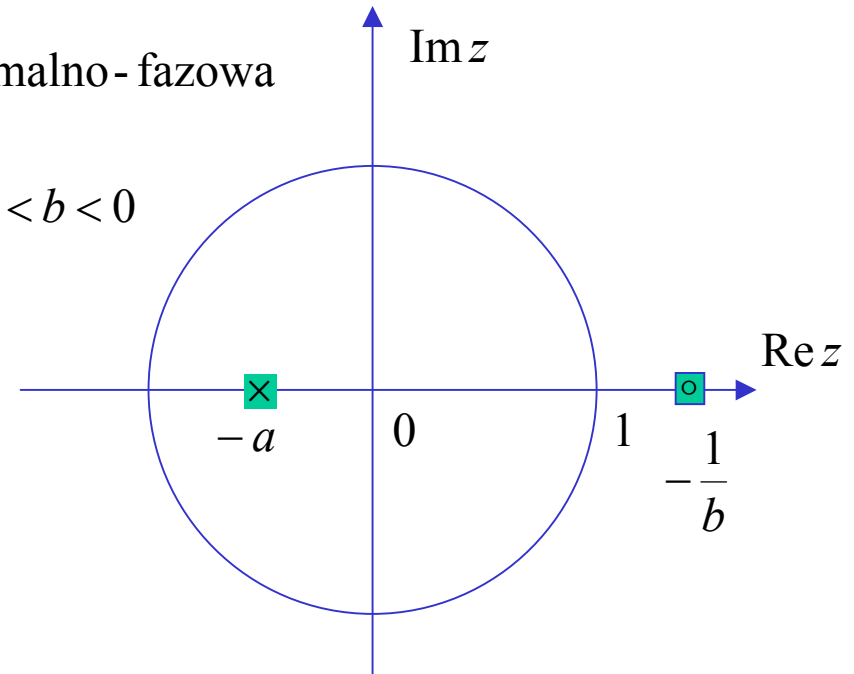
○ - zero



$H_2(z)$

maksymalno - fazowa

tu $0 < a < 1$ i $-1 < b < 0$



Charakterystyki zespolone

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} + b}{e^{j\omega} + a} = \frac{b + \cos\omega + j\sin\omega}{a + \cos\omega + j\sin\omega}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{be^{j\omega} + 1}{e^{j\omega} + a} = \frac{1 + b\cos\omega + jb\sin\omega}{a + \cos\omega + j\sin\omega}$$

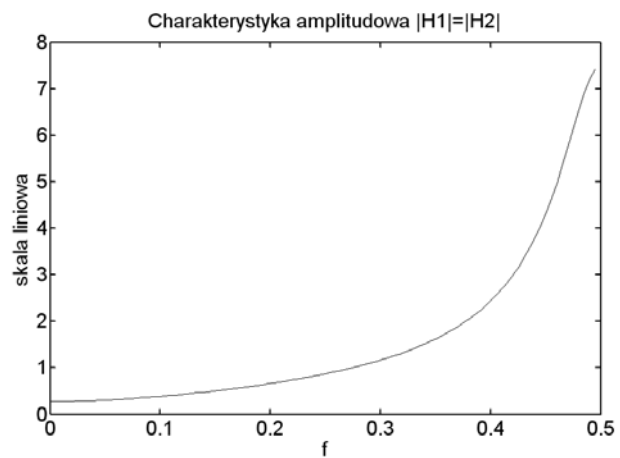
Charakterystyki amplitudowe

$$A_1(\omega) = |H_1(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{(b + \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2}{(a + \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2}} = \sqrt{\frac{b^2 + 2b\cos\omega + 1}{a^2 + 2a\cos\omega + 1}}$$

$$A_2(\omega) = |H_2(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{(1 + b\cos\omega)^2 + (b\sin\omega)^2}{(a + \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + 2b\cos\omega + b^2}{a^2 + 2a\cos\omega + 1}} =$$

$$= A_1(\omega)$$

Dla $a=0.8$ i $b=-0.5$



Charakterystyki fazowe

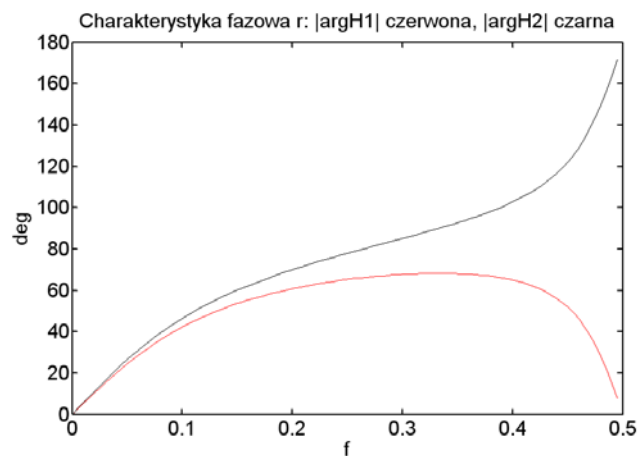
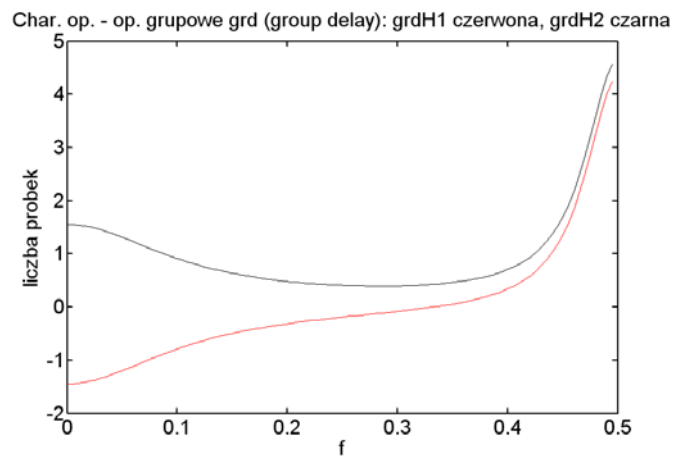
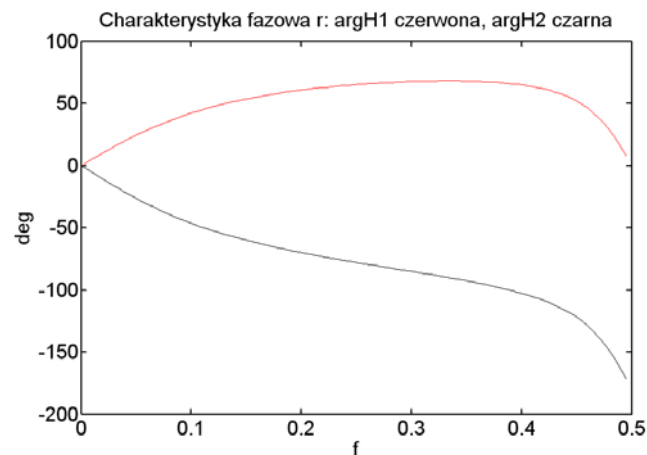
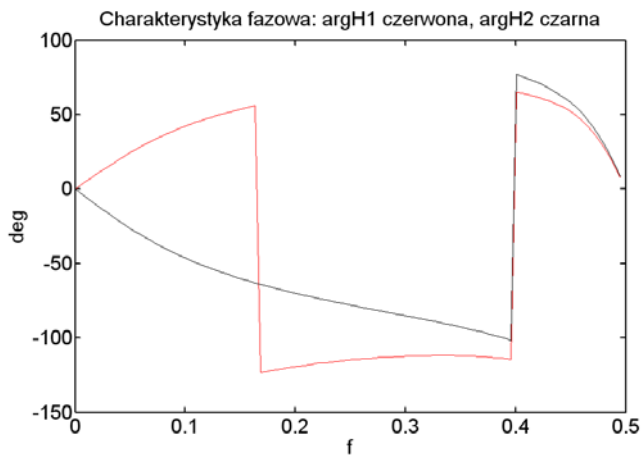
$$\varphi_1(\omega) = \arg H_1(e^{j\omega}) = \arctan \frac{\sin \omega}{b + \cos \omega} - \arctan \frac{\sin \omega}{a + \cos \omega}$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg H_2(e^{j\omega}) = \arctan \frac{b \sin \omega}{1 + b \cos \omega} - \arctan \frac{\sin \omega}{a + \cos \omega}$$

Charakterystyki opóźnień –
opóźnienie grupowe

$$\tau_1(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H_1(e^{j\omega}) = \frac{a \cos \omega + 1}{a^2 + 2a \cos \omega + 1} - \frac{b \cos \omega + 1}{b^2 + 2b \cos \omega + 1}$$

$$\tau_2(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H_2(e^{j\omega}) = \frac{a \cos \omega + 1}{a^2 + 2a \cos \omega + 1} - \frac{b(\cos \omega + b)}{b^2 + 2b \cos \omega + 1}$$



Tu wszędzie $a=0.8$ i $b=-0.5$.

```
%Dminphase.m 14.12.2008 created Ewa Hermanowicz
```

```
clear all
```

```
nmax=101;
```

```
a=0.8; b=-0.5;
```

```
f=0:1/(nmax-1):0.5;
```

```
for n=1:nmax;
```

```
f(n)=(n-1)/nmax/2;
```

```
H(n)=sqrt((b*b+2*b*cos(2*pi*f(n))+1)/(a*a+2*a*cos(2*pi*f(n))+1));
```

```
phase1(n)=(atan((sin(2*pi*f(n))/(b*cos(2*pi*f(n)))))...  
-atan((sin(2*pi*f(n))/(a*cos(2*pi*f(n))))))*180/pi;
```

```
phase1r(n)=phase1(n); if phase1(n)<0; phase1r(n)=phase1(n)+180; end;
```

```
% r - rozwijanie charakterystyki fazowej
```

```
phase2(n)=(atan((b*sin(2*pi*f(n))/(1+b*cos(2*pi*f(n)))))...  
-atan((sin(2*pi*f(n))/(a*cos(2*pi*f(n))))))*180/pi;
```

```
phase2r(n)=phase2(n); if phase2(n)>0; phase2r(n)=phase2(n)-180; end;
```

```
% r - rozwijanie charakterystyki fazowej
```

```
group1(n)=((1+a*cos(2*pi*f(n)))/(a*a+2*a*cos(2*pi*f(n))+1))...  
-((b*cos(2*pi*f(n))+1)/(b*b+2*b*cos(2*pi*f(n))+1));
```

```
group2(n)=((1+a*cos(2*pi*f(n)))/(a*a+2*a*cos(2*pi*f(n))+1))...  
-((b*cos(2*pi*f(n))+b*b)/(b*b+2*b*cos(2*pi*f(n))+1));
```

```
end
```

```

fo=22; %fontsize for figures
lo=2; %linewidth for axes
ma=8; %markersize for curves

figure(1); clf;
plot(f,H,'k', 'markersize',ma);
set(gca,'linewidth',lo);
set(gcf,'color','w')
hax=gca; set(hax,'fontsize',fo);
title('Charakterystyka amplitudowa  $|H1|=|H2|$ ')
xlabel('f','fontsize',fo)
ylabel('skala liniowa','fontsize',fo)

figure(2); clf;
plot(f,phase1,'r',f,phase2,'k', 'markersize',ma);
set(gca,'linewidth',lo);
set(gcf,'color','w')
hax=gca; set(hax,'fontsize',fo);
title('Charakterystyka fazowa: argH1 czerwona, argH2  
czarna')
xlabel('f','fontsize',fo)
ylabel('deg','fontsize',fo)

```

```

figure(3); clf;
plot(f,phase1r,'r',f,phase2r,'k', 'markersize',ma);
set(gca,'linewidth',lo);
set(gcf,'color','w')
hax=gca; set(hax,'fontsize',fo);
title('Charakterystyka fazowa r: argH1 czerwona, argH2
czarna')
xlabel('f','fontsize',fo)
ylabel('deg','fontsize',fo)

```

```

figure(4); clf;
plot(f,abs(phase1r),'r',f,abs(phase2r),'k',
'markersize',ma);
set(gca,'linewidth',lo);
set(gcf,'color','w')
hax=gca; set(hax,'fontsize',fo);
title('Charakterystyka fazowa r: |argH1| czerwona,
|argH2| czarna')
xlabel('f','fontsize',fo)
ylabel('deg','fontsize',fo)

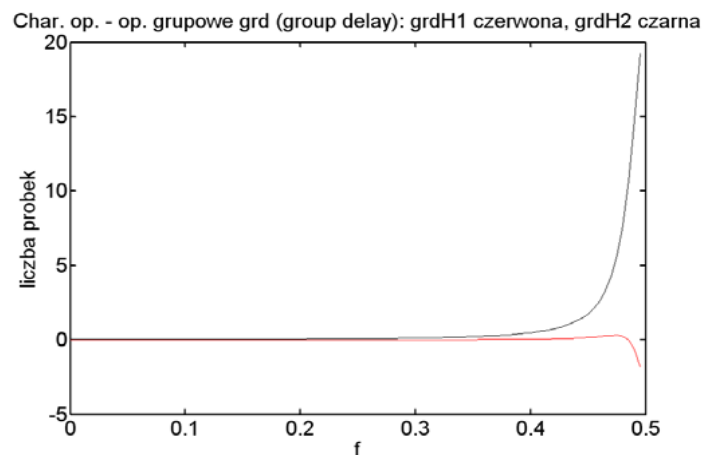
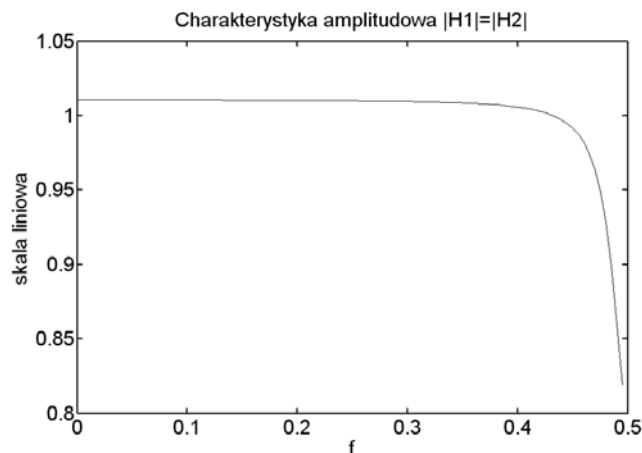
```

```

figure(5); clf;
plot(f,group1,'r',f,group2,'k', 'markersize',ma);
set(gca,'linewidth',lo);
set(gcf,'color','w')
hax=gca; set(hax,'fontsize',fo);
title('Char. op. - op. grupowe grd (group delay): grdH1
czerwona, grdH2 czarna')
xlabel('f','fontsize',fo)
ylabel('liczba probek','fontsize',fo)

```

Dla $a=0.9$ i $b=0.92$



Mieliśmy tu przykłady zastosowań DTFT do znajdowania widm sygnału dyskretnego i znajdowania charakterystyk częstotliwościowych systemu dyskretnego.

Właściwości DTFT - twierdzenia

Jeżeli $x[n] \Leftrightarrow X(e^{j\omega})$ i $y[n] \Leftrightarrow Y(e^{j\omega})$ oraz $w[n] \Leftrightarrow W(e^{j\omega})$ to słuszne są następujące twierdzenia.

1. O liniowości $ax[n] + by[n] \Leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. O przesunięciu w dziedzinie czasu $x[n - n_0] \Leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$, n_0 - całkowite
3. O przesunięciu w dziedzinie częstotliwości $x[n]e^{-j\omega_0 n} \Leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. O różniczkowaniu względem częstotliwości $nx[n] \Leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

5. O energii (Parseval)

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Dowód.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

Ale
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[-n] e^{-j\omega n} = X^*(e^{j\omega})$$

Stąd
$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

c.b.d.o.

$S(\omega) \stackrel{\Delta}{=} |X(e^{j\omega})|^2$ nazywamy widmem gęstości energii sygnału $x[n]$.

6. O splocie w dziedzinie czasu $x_1[n] * x_2[n] \Leftrightarrow X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$

7. O iloczynie lub stosowaniu okna

$$\begin{aligned} y[n] = x[n]w[n] &\Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})W(e^{j(\omega-\vartheta)})d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \text{DTFT } \{y[n]\} = Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n]e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})e^{j\vartheta n} w[n]e^{-j\omega n} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]e^{-j(\omega-\vartheta)n} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})W(e^{j(\omega-\vartheta)})d\vartheta \\ &\quad \text{c.b.d.o.} \end{aligned}$$

Uwagi.

1. W odróżnieniu od sygnałów ciągłych, operacje przeprowadzane na transformatach DTFT występujących w twierdzeniach 5, 6 i 7 są operacjami całkowania, mnożenia i splotu, wykonywanymi na funkcjach okresowych zmiennej ω z okresem 2π .
2. Wzór Parsevala mówi, że energię sygnału E można obliczać zarówno w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości.

Tablica transformat DTFT sygnału dyskretnego $x[n]$

Lp,	Ciąg $x[n]$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$	Transformata $X(e^{j\omega})$, $-\pi \leq \omega < \pi$
1	$\delta[n]$, delta Kroneckera	1
2	$\delta[n - n_0]$, n_0 – całkowite	$e^{-j\omega n_0}$
3	1, $-\infty < n < \infty$	$2\pi\delta(\omega)$ delta Diraca
4	$u[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega)$
5	$a^n u[n]$, $ a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
6	$(n+1)a^n u[n]$, $ a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7	$\frac{r^n \sin[\omega_p(n+1)]}{\sin \omega_p} u[n]$, $ r < 1$	$\frac{1}{1 - 2r \cos(\omega_p) e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8	$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega < \pi \end{cases}$
9	$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n < 0 \text{ i } n > M \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10	$e^{j\omega_0 n}$ zespolona sinusoida	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ widmo prawostronne
11	$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\pi[e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)]$