

## ANALIZA WIDMOWA

- Wprowadzenie
- Nieparametryczne metody analizy widmowej: periodogram (Schustera) i periodogram ważony
- Literatura uzupełniająca z analizy widmowej

Ewa Hermanowicz, p.642, konsultacje: poniedziałek godz. 14:30 do 15:30, czwartek godz. 10-11.

## ANALIZA WIDMOWA

### Wprowadzenie

Analiza widmowa to każda metoda przetwarzania sygnału opisująca zawartość częstotliwościową sygnału. Przekształcenie (całkowe) Fouriera jest podstawą matematyczną wiążącą sygnał czasowy lub przestrzenny, lub model takiego sygnału, z jego reprezentacją w dziedzinie częstotliwości, czyli z widmem.

Widmo (zespolone) sygnału analogowego deterministycznego  $x(t)$  to

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1.1)$$

gdzie pulsacja (częstotliwość kątowna)  $\Omega = 2\pi F$  jest wyrażana w rad/s,  $F$  to częstotliwość w Hz, a  $j^2 = -1$ . Mamy tu do czynienia z  $\mathbf{F}$  – transformacją sygnału  $x(t)$ . Jej wynikiem jest transformata  $X(j\Omega)$ , czyli widmo sygnału  $x(t)$ .

Widmo gęstości energii (WGE) to

$$E(\Omega) = |X(j\Omega)|^2 \quad (1.2)$$

(po angielsku ESD – energy spectral density). WGE to również wynik  $\mathbf{F}$  – transformacji funkcji autokorelacji  $r(\tau)$  stacjonarnego sygnału  $x(t)$  (którego właściwości nie zmieniają się w funkcji czasu  $t$  (nie zależą od czasu  $t$ ))

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = r^*(-\tau); \quad r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.3)$$

(przy czym dla sygnałów o wartościach rzeczywistych  $r(\tau)$  jest rzeczywista i parzysta).

Tzn. WGE (widmo gęstości energii)

$$E(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (1.4)$$

to transformata Fouriera funkcji autokorelacji. Całkowita energia sygnału, ze wzoru Parsewala, to

$$E = r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\Omega) d\Omega \quad (1.5a)$$

Gdy sygnał jest rzeczywisty (o wartościach rzeczywistych) to bierzemy 2 całki od zera (funkcja podcałkowa jest parzysta)

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E(\Omega) d\Omega \quad (1.5b)$$

Powyższe jest słuszne dla sygnałów o skończonej energii:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.6)$$

Uwaga! Jeżeli po prawej stronie we wzorze (1.5a) posłużymy się częstotliwością  $F$  zamiast pulsacją  $\Omega$  to  $E = \int_{-\infty}^{\infty} E(F) dF$ , zatem pozbywamy się współczynnika  $1/(2\pi)$ . Podobnie w innych tego typu wzorach. **Uwaga!** Powyżej zajmowaliśmy się sygnałem analogowym tj. z czasem ciągłym.

Dla sygnałów dyskretnych operuje się dyskretno-czasową transformacją Fouriera (**DTFT**). Wówczas, dla ciągu  $x[n]$ , mamy widmo (zespolone)

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}; \omega = \Omega / F_s; F_s - \text{częstotliwość próbkowania w Hz} \quad (1.7)$$

Tu  $\omega$  jest wyrażana w rad/Sa (w radianach na próbkę);  $\omega = 2\pi f$ ;  $\omega \in [-\pi, \pi)$ ,  $f \in [-1/2, 1/2)$ . WGE sygnału  $x[n]$  to

$$E(\omega) = |X(j\omega)|^2 \quad (1.8)$$

lub

$$E(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k] e^{-j\omega k} \quad (\text{DTFT z } r[k]) \quad (1.9)$$

gdzie

$$r[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x^*[n-k] \quad \text{to funkcja autokorelacji – dyskretna.} \quad (1.10)$$

Widmo gęstości mocy (WGM) dla sygnału deterministycznego  $x(t)$  to

$$P(F) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{|X_T(jF)|^2}{T} \right) \quad (1.11)$$

(po angielsku PSD – power spectral density). Widmo to opisuje rozkład mocy sygnału wzdłuż osi częstotliwości. WGM jest bardziej użyteczna niż WGE, ponieważ w rozwiązywaniu problemów komunikacji generalnie wykorzystuje się modele oparte na

mocy sygnału. We wzorze (1.11)  $P(F)$  jest wyrażana w jednostkach: wat na Hz, a  $X_T(jF)$  to  $\mathbf{F}$  – transformata sygnału uciętego (centralny fragment sygnału – ma ograniczoną energię)

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & -\infty < t < -T/2, \quad T/2 < t < \infty \end{cases} \quad (1.12)$$

Znormalizowana (względem 1 ohma) moc średnia

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt \quad (1.13)$$

Na mocy twierdzenia Parsewala ta znormalizowana moc średnia może być też wyrażona jako

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(F)|^2}{T} \right) dF \quad (1.14)$$

Zmienna podcałkowa po prawej stronie (1.14) to PSD (WGM). Jest to zawsze nieujemna funkcja częstotliwości, niewrażliwa na widmo fazowe sygnału  $x(t)$ . Rzecz jasna, znormalizowana moc średnia to

$$P = \langle |x(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(F) dF \quad (1.15)$$

A moc średnia sygnału o wartościach rzeczywistych zawarta w paśmie  $\Delta F = F_2 - F_1$  jest równa

$$P(\Delta F) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-F_2}^{-F_1} |X(F)|^2 dF + \int_{F_1}^{F_2} |X(F)|^2 dF \right] = 2 \int_{F_1}^{F_2} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(F)|^2}{T} \right) dF \quad (1.16)$$

Powyżej mieliśmy do czynienia z tzw. bezpośrednią metodą obliczania PSD (WGM). Ten sam wynik otrzymuje się za pomocą metody autokorelacyjnej. Autokorelacja przebiegu fizycznego jest definiowana jako

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (1.17)$$

Twierdzenie Wienera-Chinczyna mówi, że pomiędzy WGM a funkcją autokorelacji zachodzi związek (para transformat Fouriera)

$$R(\tau) \Leftrightarrow P(F) \quad (1.18)$$

gdzie  $P(F)$  jest  $\mathbf{F}$  – transformatą funkcji autokorelacji  $R(\tau)$ . Zatem drugą metodą obliczania WGM, tj.  $P(F)$ , jest metoda polegająca na obliczeniu funkcji autokorelacji, a następnie obliczeniu transformaty Fouriera tej funkcji.

### Przykład 1. Obliczanie WGM sinusoidy metodą autokorelacyjną

Weźmy sygnał

$$x(t) = A \sin(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty \quad (1.19)$$

Autokorelacją jest

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin(\Omega_0 t) \sin(\Omega_0(t-\tau)) dt = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\Omega_0 \tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt - \frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\Omega_0 t - \Omega_0 \tau) dt \end{aligned} \quad (1.20)$$

ponieważ skorzystano powyżej ze znanej tożsamości trygonometrycznej

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (1.21)$$

Po obliczeniu całek oznaczonych i limesów wzór (1.20) sprowadza się do

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\Omega_0 \tau) \quad (1.22)$$

Zatem WGM, czyli transformata Fouriera funkcji (1.22) wynosi

$$P(F) = \frac{A^2}{4} [\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)] \quad (1.23)$$

Znormalizowana moc średnia

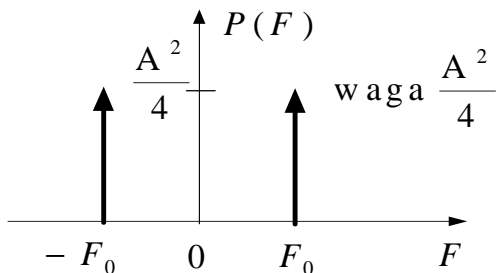
$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4} [\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)] dF = \frac{A^2}{2} \quad (1.24)$$

Wartość ta zgadza się ze znanym wynikiem na znormalizowaną moc sinusoidy

$$P = \left( A / \sqrt{2} \right)^2 = A^2 / 2 \quad (1.25)$$

gdzie w nawiasie występuje wartość skuteczna (inaczej średniokwadratowa) sinusoidy.

Sygnaly  $A \sin(\Omega_0 t)$  i  $A \cos(\Omega_0 t)$  mają tę samą WGM i tę samą funkcję autokorelacji, ponieważ faza nie ma wpływu ani na autokorelację ani na WGM. Można to sprawdzić obliczając WGM dla  $A \cos(\Omega_0 t)$  jak wcześniej to zrobiono dla  $A \sin(\Omega_0 t)$ .

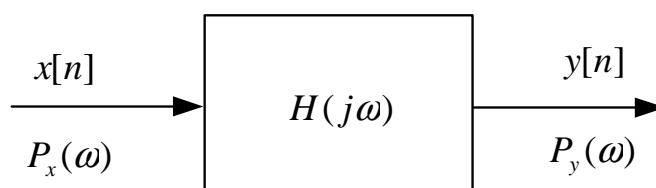


Rys. 1. WGM sinusoidy z czasem ciągłym. Widmo (jak widać) parzyste.

Sumując  $A^2/4$  z  $A^2/4$  na rys. 1 otrzymujemy  $A^2/2$ , a to jest moc sinusoidy o amplitudzie  $A$ .

Związek pomiędzy WGM na wejściu i wyjściu systemu dyskretnego liniowego o charakterystyce amplitudowo-fazowej  $H(j\omega)$

$$P_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 P_x(\omega) \quad (1.26)$$



Rys. 2. Przenoszenie WGM przez dyskretny układ liniowy.

Uwaga! Takie same związki zachodzą dla dyskretnej funkcji autokorelacji i WGM obliczonej na podstawie DTFT.

WGM dla dyskretnych sygnałów stochastycznych mówi, jaką moc średnią zawiera sygnał w funkcji częstotliwości.

Jeżeli ciąg autokorelacji wyrazimy za pomocą wzoru

$$r[k] = E\{x[n]x^*[n-k]\} = r^*[-k] \quad (1.28)$$

wówczas WGM to DTFT z  $r[k]$

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]e^{-j\omega k} \quad (1.29)$$

i odwrotnie, IDTFT z  $P(\omega)$

$$r[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (1.30)$$

Albo, zakładając, że ciąg autokorelacji dostatecznie szybko maleje

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |r[k]| = 0 \quad (1.31)$$

możemy wykorzystać inną definicję WGM omijającą autokorelację

$$P(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2 \right\} \quad (1.32)$$

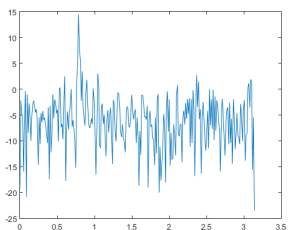
prowadzącą do tych samych wyników jak (1.29). Z tej definicji wynika najpopularniejsza estymata WGM zwana periodogramem Schustera.

## Nieparametryczne metody analizy widmowej: periodogram i korelogram

Metoda **periodogramu** (należąca do metod nieparametrycznych) oparta jest na definicji (1.32). Formalnie, problem estymacji WGM formułuje się następująco.

**Na podstawie skończonej obserwacji  $\{x[1], x[2], \dots, x[N]\}$  procesu losowego stacjonarnego, oblicz estymatę  $P(\omega)$  widma gęstości mocy dla  $-\pi \leq \omega < \pi$ .**

Pomijając operator wartości oczekiwanej w (1.32) oraz przejście do granicy, których nie można wykonać, gdy jedyną dostępną informacją jest zbiór próbek sygnału  $\{x[n]\}_{n=1}^N$ , otrzymujemy estymator  $\hat{P}(\omega)$  periodogramu  $P(\omega)$  Schustera



$$\hat{P}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N x[n] e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (1.33)$$

którego pierwszym zastosowaniem (Schuster – 1889) było wykrywanie ukrytych okresowości (ang. *hidden periodicities*, gdzie okres – *period*) w ciągu próbek. Stąd nazwa: periodogram. Na rysunku widzimy periodogram z MATLABa w skali decybelowej dla zaszumianej sinusoidy rzeczywistej. Rzeczywistej dlatego, że pokazuje tylko dodatnie pulsacje, od zera do pi. Położenie maksimum odpowiada pulsacji tej sinusoidy. Wprawne oko potrafi oszacować, że SNR w przybliżeniu równa się 20 dB.

Periodogram to wykres (diagram), który pokazuje najważniejsze okresowe regularności występujące w sygnale. Piki na diagramie odpowiadają okresom (cyklom), które najbliższe korelują z danymi. Interpretacją periodogramu zajmuje się analiza widmowa.

Jeżeli zastosujemy ważenie sygnału  $\{x[n]\}_{n=1}^N$  za pomocą okna  $\{w[n]\}_{n=1}^N$ , to otrzymujemy estymator periodogramu ważonego, zwanego też zmodyfikowanym

$$\hat{P}(\omega) = \frac{\frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N x[n] w[n] e^{-j\omega n} \right|^2}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |w[n]|^2} \quad (1.34)$$

Wykorzystuje się tutaj okno temperujące  $w[n]$  zapobiegające przeciekowi widma DTFT, co sprzyja polepszeniu rozdzielczości tego estymatora WGM.

## Literatura uzupełniająca z analizy widmowej

- [1] E.J. Ericsson, L. F. Cepeda, R. D. Rodman, K. P. H. Sullivan, D. F. McAllister, D. Bitzer and P. Arroway: Robustness of Spectral Moments: a Study using Voice Imitations, Proc. of the 10<sup>th</sup> Australian International Conference on Speech Science and Technology, Macquarie University, Sydney, December 8 to 10, 2004, pp. 259-264. Dostępne w Internecie.
- [2] **A. Czyżewski: Dźwięk cyfrowy. Wybrane zagadnienia teoretyczne, technologia, zastosowania. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 1998, p. 4.3 str. 156 – Predykcja liniowa, filtry kratowe, też na str. 177, filtry formantowe – str. 185.**
- [3] J. Szabatin: Podstawy teorii sygnałów. WKiŁ, Warszawa 1982 i późniejsze wydania, moc zdefiniowana na str. 27, momenty jako parametry zmiennych losowych – str. 147, widmo gęstości energii i widmo gęstości mocy str. 305 i 307.
- [4] L. Rutkowski: Filtry adaptacyjne i adaptacyjne przetwarzanie sygnałów. Teoria i zastosowania. WNT, Warszawa 1994, rozdz. 3, str. 49 – Zagadnienia liniowej predykcji, str. 55 – właściwości macierzy autokowariancji.
- [5] A. Wojnar: Teoria sygnałów. WNT, Warszawa 1980, widmo gęstości energii str. 23, momenty procesu stacjonarnego str. 33, szerokość widma str. 56.
- [6] J. Sobkowski: Częstotliwościowa analiza sygnałów. Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej, Warszawa 1975, Widmo gęstości energii i widmo gęstości mocy p. 5.2.5, str. 170, momenty jako charakterystyki procesów przypadkowych – p. 9.1.1, str. 437.
- [7] W. Borodziejewicz, K. Jaszczak: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WNT, Warszawa 1987, Durbin – str. 131 w rozdziale pt. Liniowa predykcja sygnału mowy.
- [8] S. W. Smith: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Praktyczny poradnik dla inżynierów i naukowców. Wydawnictwo BTC, Warszawa 2007, str. 351-355 – Synteza i rozpoznawanie mowy. Oryginał darmowy <http://www.dspsguide.com> Chapter 22: Speech Synthesis and Recognition.
- [9] **T. Zieliński: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań. WKiŁ, Warszawa 2005, rozdział 1: momenty na str. 6 w tablicy, korelacja str. 14, periodogram i modelowanie AR, MA i ARMA ale bez struktur, WGM. Też str. 447, STFT str. 455.**
- [10] L. Grad: Obrazowa reprezentacja sygnału mowy. Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki WAT Nr 8, 1997, Dostępne w Internecie.