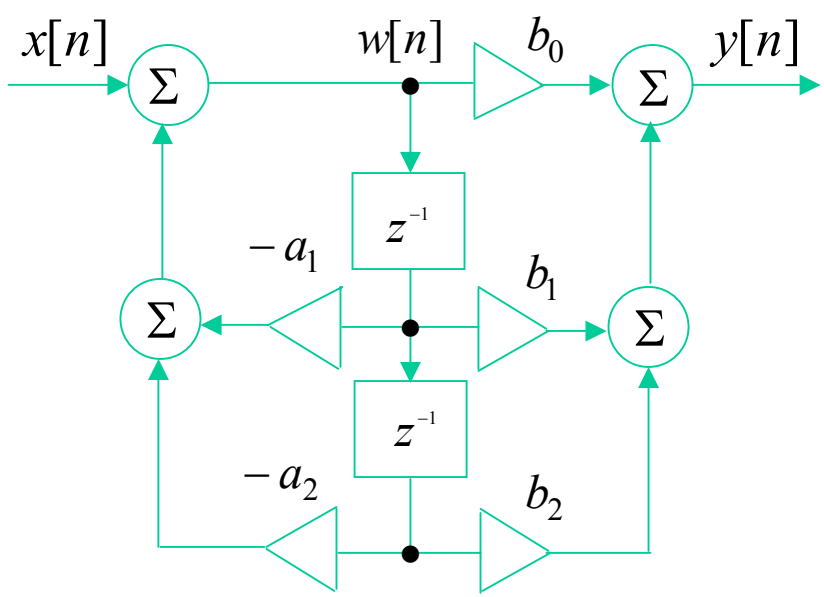
Przykład.

Zaprojektuj, za pomocą transformacji biliniowej (1a) przekształcającej operator Laplace'a „s" w zmienną „z" i wynikającej z niej transformacji pulsacji (1b) cyfrowej w analogową, dolnoprzepustowy filtr cyfrowy IIR drugiego rzędu o 3 – dB pulsacji odcięcia $\omega_c = \pi/2$ i wzmocnieniu dla składowej stałej równym 1. Prototyp analogowy ma transmitancję określoną wzorem (2) z trzy-decybelową pulsacją odcięcia $\Omega_c = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Transformację analogowego filtru dolnoprzepustowego o pulsacji odcięcia Ω_c na analogowy filtr dolnoprzepustowy o pulsacji granicznej Ω_d realizuje podstawienie (3). Znajdź transmitancję $H(z)$ filtru cyfrowego i sprawdź, czy spełnia on narzucone wymagania. Narysuj strukturę (schemat blokowy) i nanieś wartości współczynników. Napisz algorytm działania tej struktury. Czy zaprojektowany filtr jest przyczynowy i czy jest stabilny? Odpowiedź uzasadnij.

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{(1a)} \qquad \Omega_d = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \quad \text{(1b)} \qquad H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (2) \qquad s = \frac{\Omega_c}{\Omega_d} s' \quad (3)$$

<u>Rozwiązanie</u>. Struktura IIR 2D sekcji bikwadratowej. Poszukujemy jej współczynników.



W tym celu najpierw wykonujemy transformację pulsacji (1b).Tu ma ona postać

$$\Omega_d = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan 45^0 = 1$$

Zatem tu

$$\Omega_d = \Omega_c = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{i} \quad s = s'$$

Teraz przetransformujmy prototyp analogowy $H(s)$ na filtr cyfrowy $H(z)$ za pomocą transformacji biliniowej (1a)

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\left(1+z^{-1}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)z^{-2}} \cong \frac{0.293\left(1+z^{-1}\right)^2}{1+0.17157z^{-2}}$$

Sprawdzamy wzmocnienie dla składowej stałej (częstotliwość zerowa)

$$H(z)\Big|_{z=e^{j0}=1} = \frac{(2)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)} = 1$$

Sprawdzamy spadek wzmocnienia dla $\omega = \omega_c = \pi/2$. Ze wzoru ogólnego na charakterystykę amplitudową

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H(z)\right|_{z=e^{j\omega}} = \left|\frac{\left(1+e^{-j\omega}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)e^{-j2\omega}}\right| = \frac{4\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|^2}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2+2^2\cos 2\omega}} = \frac{4\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|^2}{\sqrt{12+4\cos 2\omega}} = \frac{2\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|^2}{\sqrt{3+\cos 2\omega}}$$

otrzymujemy

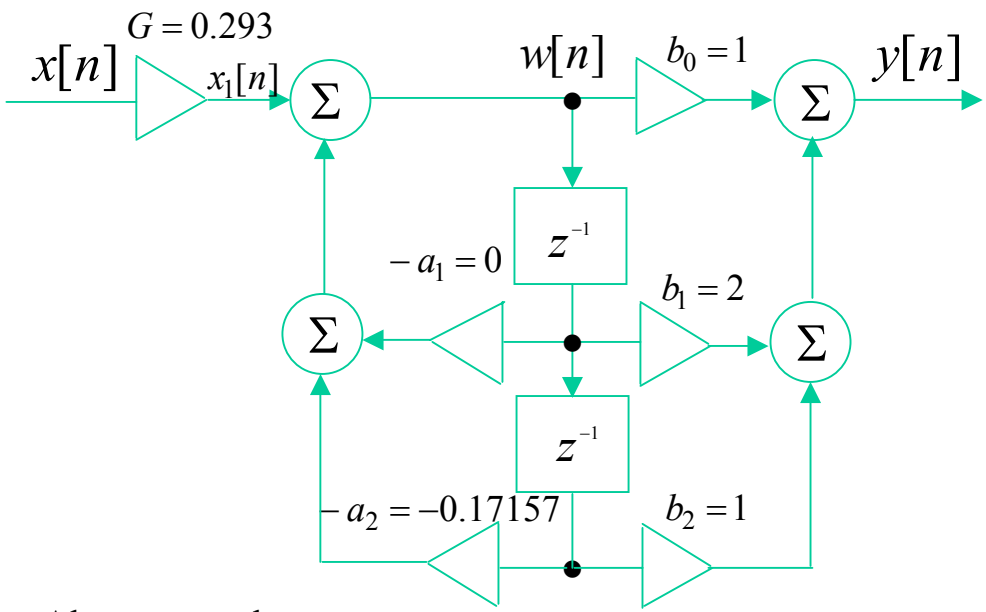
$$\left|H(e^{j\omega_c})\right| = \left|H(e^{j90^0})\right| = \frac{2\left|\cos 45^0\right|^2}{\sqrt{3+\cos 180^0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A ponieważ $20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3\,\text{dB}$, to oznacza, że wymagania są spełnione.

Ponadto łatwo sprawdzić, że

$$\left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\pi} = 0$$

Struktura

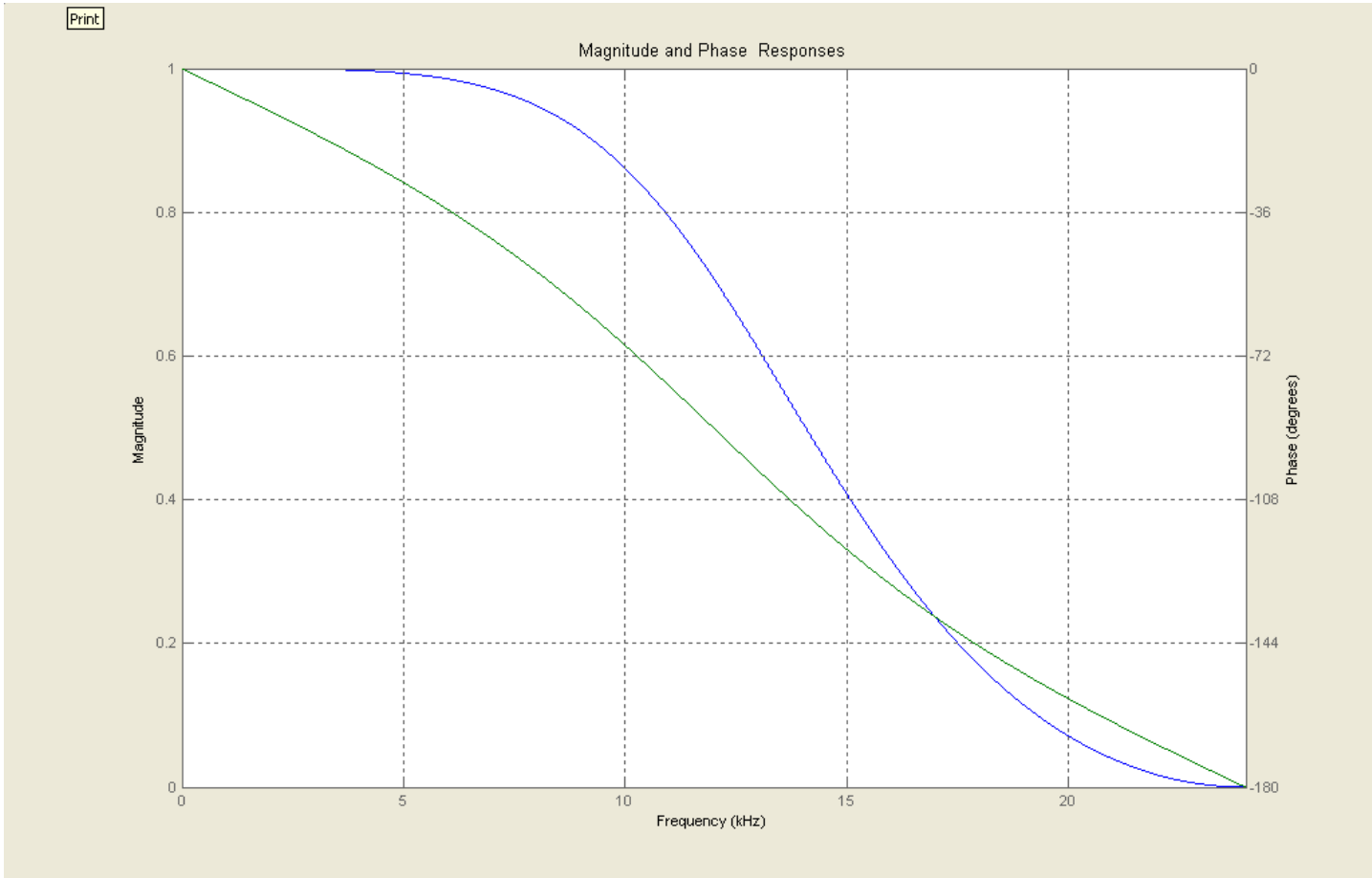


Algorytm struktury

$$y[n] = w[n] + 2w[n-1] + w[n-2]$$
$$w[n] = x_1[n] - 0.17157w[n-2]$$
$$x_1[n] = 0.293x[n]$$

Wykresy z **`fdatool`** i **`fvtool`** w MATLABie dla częstotliwości próbkowania 48 kHz i częstotliwości 3 dB spadku wzmocnienia 12 kHz.

Współczynniki struktury jak na poprzednim rysunku.



Stabilność i przyczynowość sprawdzamy badając, czy bieguny $H(z)$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. W tym celu mianownik $H(z)$ przyrównujemy do zera

$$1+0.17157z^{-2}=0$$

Stąd

$$z_1=z_2^*=j0.4142 \quad \text{lub} \quad z_{1,2}=\pm j0.4142$$

A więc

$$\left|z_{1,2}\right|<1$$

To oznacza filtr stabilny i przyczynowy. To samo można stwierdzić na podstawie odpowiedzi impulsowej. Wyraża ją wzór

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=\frac{b_0}{a_2}\left\{\delta[n]+\left(\sqrt{a_2}\right)^n\left[(a_2-1)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+2\sqrt{a_2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]u[n]\right\}, \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

Ta odpowiedź impulsowa jest przyczynowa, gdyż $h[n]=0$ dla $n<0$ i bezwzględnie sumowalna: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h[n]\right|<\infty$.

A więc również na podstawie kryterium stabilności w dziedzinie czasu dyskretnego otrzymujemy, że ten filtr jest przyczynowy i stabilny.
Warto powtórzyć ten projekt dla innej wartości ω_c , np. dla $\omega_c=\pi/4$ (filtr ćwierć-pasmowy).

Uwaga! Za pomocą transformacji biliniowej ze stabilnego prototypu analogowego zawsze otrzymamy stabilny filtr cyfrowy.