

## SZEREGI FOURIERA

### Uogólniony szereg Fouriera

Iloczyn skalarny  $\langle x, y \rangle$  dwóch sygnałów zespolonych  $x(t)$ ,  $y(t)$  w przedziale  $a \leq t \leq b$

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt$$

Dla iloczynu skalarnego zachodzi symetria hermitowska  $\langle x, y \rangle = (\langle y, x \rangle)^*$ .

Dwa sygnały  $x(t)$ ,  $y(t)$  są *ortogonalne*  $x \perp y$ , gdy ich iloczyn  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Norma  $\|x\|$  sygnału  $x(t)$  całkowalnego z kwadratem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \geq 0$$

Skończony lub nieskończony ciąg sygnałów  $g_0, g_1, g_2, \dots$  jest *ciągami ortogonalnym*, gdy  $\langle g_m, g_n \rangle = 0$  dla  $m \neq n$  i  $\langle g_k, g_k \rangle = \|g_k\|^2 \neq 0$  dla każdego  $k$ .

Ciąg ortogonalny  $g_0, g_1, g_2, \dots$  jest *ciągami ortonormalnym*, gdy  $\langle g_k, g_k \rangle = \|g_k\|^2 = 1$ .

Ciąg ortogonalny jest *zupelny*, gdy poza tym ciągiem nie istnieje w przestrzeni sygnałów całkowalnych z kwadratem sygnał (oprócz sygnału zerowego), który byłby ortogonalny do wszystkich sygnałów ciągu.

Uogólniony szeregiem Fouriera sygnału  $x(t)$  całkowalnego z kwadratem w przedziale  $a \leq t \leq b$  względem ciągu ortogonalnego  $g_0, g_1, g_2, \dots$  nazywamy szereg

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(t), \quad c_k = \frac{\langle x, g_k \rangle}{\|g_k\|^2}$$

W przypadku, gdy ciąg  $g_0, g_1, g_2, \dots$  jest ortonormalny i zupelny (jest bazą ortonormalną), to zachodzi *równość Parsevala*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$$

### Trygonometryczny szereg Fouriera

W trygonometrycznym szeregu Fouriera wybrano jako ciąg ortonormalny, zupełny (bazę) ciąg funkcji trygonometrycznych

$$1, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \sin 3\omega_0 t, \dots$$

Są to funkcje okresowe z podstawowym okresem  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , gdzie pulsacja  $\omega_0$  nazywa się pulsacją podstawową. Dzięki temu będzie możliwe rozwinięcie w szereg nie tylko sygnału  $x(t)$  określonego w przedziale  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$ , ale też sygnału okresowego  $x(t) = x(t + T_0)$ , określonego na całej osi czasu.

Rozwinięcie rzeczywistego sygnału okresowego  $x(t) = x(t + T_0)$  w trygonometryczny szereg Fouriera

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

gdzie dla  $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt$$

jest wartością średnią w okresie  $T_0$  sygnału, a dla  $k = 1, 2, \dots$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

Skracamy zapis tych całek  $\int_{t_0}^{t_0+T_0} = \int_{T_0}$ .

Ponieważ obowiązuje wzór trygonometryczny

$$a \cos \beta + b \sin \beta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(\beta - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right)$$

to między parametrami obu postaci szeregu trygonometrycznego zachodzą związki

$$C_0 = a_0, \varphi_0 = 0, C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}, k = 1, 2, \dots$$

Współczynniki  $C_k$  nazywają się *widmem amplitudowym*, a kąty  $\varphi_k$  *widmem fazowym* sygnału okresowego  $x(t)$ .

Sygnał okresowy ma widmo dyskretne, prążkowe.

Prążki widma występują na pulsacjach  $k\omega_0$  i nazywają się harmonicznymi sygnału.

Wartości prążków widma amplitudowego są podawane w takich samych jednostkach jak sygnał, tzn. jeśli sygnał jest sygnałem napięciowym, to wartości prążków są podawane w woltach. Jeśli sygnał jest sygnałem prądowym, to wartości prążków są podawane w amperach.

Wartości prążków widma fazowego są podawane w radianach lub stopniach.

Ponieważ dla każdego zbieżnego szeregu (nie tylko szeregu Fouriera) wyrazy zmierzają do zera przy  $k \rightarrow \infty$ , to prążki widma amplitudowego maleją do zera przy pulsacji zmierzającej do nieskończoności. Dokładniej, jeżeli sygnał  $x(t)$  jest funkcją ciągłą wraz pochodnymi do rzędu  $n$ -tego włącznie, to  $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k k^{n+1} = 0$ .

Równość Parsevala dla trygonometrycznego szeregu Fouriera

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

Równość ta oznacza, że moc sygnału okresowego może być obliczona w dziedzinie czasu

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

lub w dziedzinie częstotliwości jako suma ważona podniesionych do

kwadratu prążków widma amplitudowego.

Podniesione do kwadratu widmo amplitudowe nazywa się *widmem mocy*. W przypadku okresowych sygnałów napięciowych i prądowych moc sygnału jest mocą na rezystancji jednostkowej. Wartość prążka widma mocy jest podawana w watach.

Pierwiastek z mocy sygnału na rezystancji jednostkowej jest wartością skuteczną sygnału okresowego  $X_{sk} = \sqrt{P}$ .

Warunkiem dostatecznym istnienia szeregu Fouriera jest bezwzględna całkowalność sygnału

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

Jest to tzw. słaby warunek Dirichleta.

Szereg Fouriera sygnału ma w każdym punkcie przedziału  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$  wartość równą sygnałowi rozwijanemu  $x(t)$ , gdy są spełnione tzw. mocne warunki Dirichleta:

- przedział  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$  można podzielić na skończoną liczbę przedziałów otwartych, w których  $x(t)$  jest funkcją monotoniczną;
- w przedziale  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$  istnieje skończona liczba nieciągłości pierwszego rodzaju (skoków), w których  $x(t) = \frac{1}{2} [x(t-0) + x(t+0)]$ .

Przykładem sygnału okresowego, który nie spełnia warunków Dirichleta jest sygnał  $\text{tg}(t)$ .

Dla sygnałów okresowych oblicza się:

- współczynnik szczytu

$$k_s = \frac{A}{X_{sk}}$$

- zawartość harmonicznych

$$h_k = \frac{C_k}{C_1} \Big|_{k=2,3,\dots}$$

- współczynnik zawartości harmonicznych

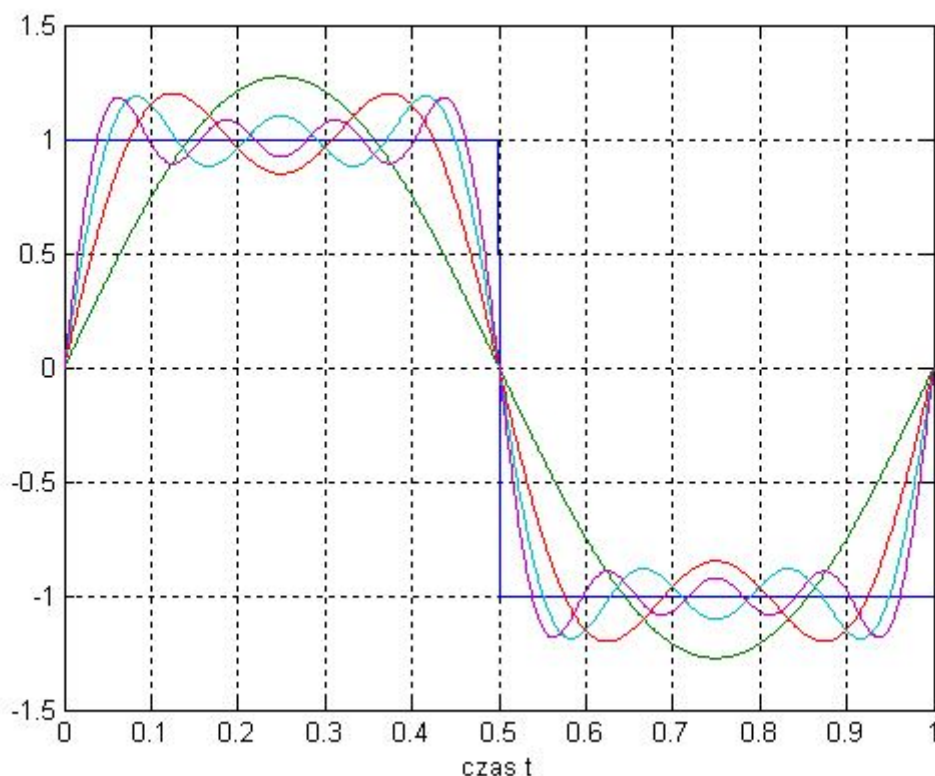
$$h = \sqrt{h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + \dots} = \sqrt{\frac{P - P_0}{P_1} - 1}$$

Zbieżność szeregu Fouriera na przykładzie fali kwadratowej o rozwinięciu

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \frac{1}{7} \sin 7\omega_0 t + \dots \right)$$

W miarę uwzględniania coraz większej liczby harmonicznych aproksymacja jest coraz dokładniejsza, ale tylko w sensie średniego błędu kwadratowego.

W sensie wartości bezwzględnej odchyłki dokładność aproksymacji nie polepsza się ze wzrostem liczby harmonicznych. Amplituda pierwszego przerezu nie maleje do zera i pozostaje na poziomie około 18%. Nazywa się to zjawiskiem Gibbsa.



## Wykładniczy szereg Fouriera

W wykładniczym szeregu Fouriera wybrano jako ciąg bazę ciąg funkcji wykładniczych

$$\dots, e^{-j3\omega_0 t}, e^{-j2\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, 1, e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, \dots$$

Wykładniczy szereg Fouriera

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}$$

gdzie

$$D_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

są współczynnikami zespolonymi  $D_k = |D_k| e^{j\varphi_k}$  spełniającymi zależność  $D_{-k} = D_k^*$ .

Widmo  $D_k$  jest widmem dwustronnym, gdyż indeksy  $k$  rozciągają się od minus do plus nieskończoności.

Widmo amplitudowe jest funkcją parzystą, a widmo fazowe funkcją nieparzystą dla sygnału rzeczywistego.

Z przekształcenia

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (D_k e^{jk\omega_0 t} + D_k^* e^{-jk\omega_0 t}) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|D_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

widać, że między współczynnikami trygonometrycznego i wykładniczego szeregu Fouriera zachodzą związki

$$C_0 = D_0, \quad C_k = 2|D_k|, \quad \varphi_k = \arg D_k$$

Równość Parsewala

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = D_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |D_k|^2$$

**Przykład 55**

**Przykład 56**

### Właściwości szeregu Fouriera

**Właściwość 1.** Działanie obliczania współczynników rozwinięcia w szereg Fouriera jest działaniem liniowym. Jeśli sygnał okresowy jest kombinacją liniową sygnałów okresowych, to współczynniki jego rozwinięcia w szereg Fouriera są kombinacją współczynników rozwinięć składowych sygnałów. Współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera są wprost proporcjonalne do amplitudy  $A$  sygnału okresowego.

**Właściwość 2.** Przesunięcie sygnału okresowego w pionie na osi rzędnych spowoduje, że w widmie zmieni się tylko prążek składowej stałej, a przesunięcie sygnału w poziomie na osi czasu spowoduje, że w widmie zmieni się tylko widmo fazowe o wartość  $-k\omega_0 t_0$  :

$$x(t) \rightarrow E_0 + x(t - t_0), \quad C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \rightarrow C_0 + E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos[k\omega_0(t - t_0) + \varphi_k]$$

**Właściwość 3.** Jeżeli rzeczywisty sygnał okresowy jest funkcją parzystą  $x(t) = x(-t)$ , to jego widmo dwustronne jest czysto rzeczywiste, a w jego trygonometrycznym rozwinięciu w szereg Fouriera występują wyłącznie składowe kosinusoidalne, gdyż składowe sinusoidalne zerują się  $b_k = 0$ .

**Właściwość 4.** Jeżeli rzeczywisty sygnał okresowy po odrzuceniu składowej stałej jest funkcją nieparzystą  $x(t) = -x(-t)$ , to jego widmo dwustronne jest czysto urojone, a w jego trygonometrycznym rozwinięciu w szereg Fouriera występują wyłącznie składowe sinusoidalne, gdyż składowe kosinusoidalne zerują się  $a_k = 0$ .

**Właściwość 5.** Jeżeli rzeczywisty sygnał okresowy po odrzuceniu składowej stałej ma właściwość antysymetrii  $x(t) = -x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$ , to w widmie sygnału występują wyłącznie nieparzyste harmoniczne  $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$ . W sygnale antysymetrycznym w dwóch kolejnych półokresach przebieg różni się tylko znakiem.

**Właściwość 6.** Sygnał  $x(t)$  nazywamy *odcinkami gładkim* w przedziale  $a \leq t \leq b$ , gdy funkcje  $x(t)$  i  $x'(t)$  są w tym przedziale ciągłe poza skończoną liczbą punktów nieciągłości pierwszego rodzaju (skoków). Jeżeli sygnał okresowy  $x(t)$  jest odcinkami gładki, to równość

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}$  może być dwustronnie zróżniczkowana

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 D_k e^{jk\omega_0 t}$$

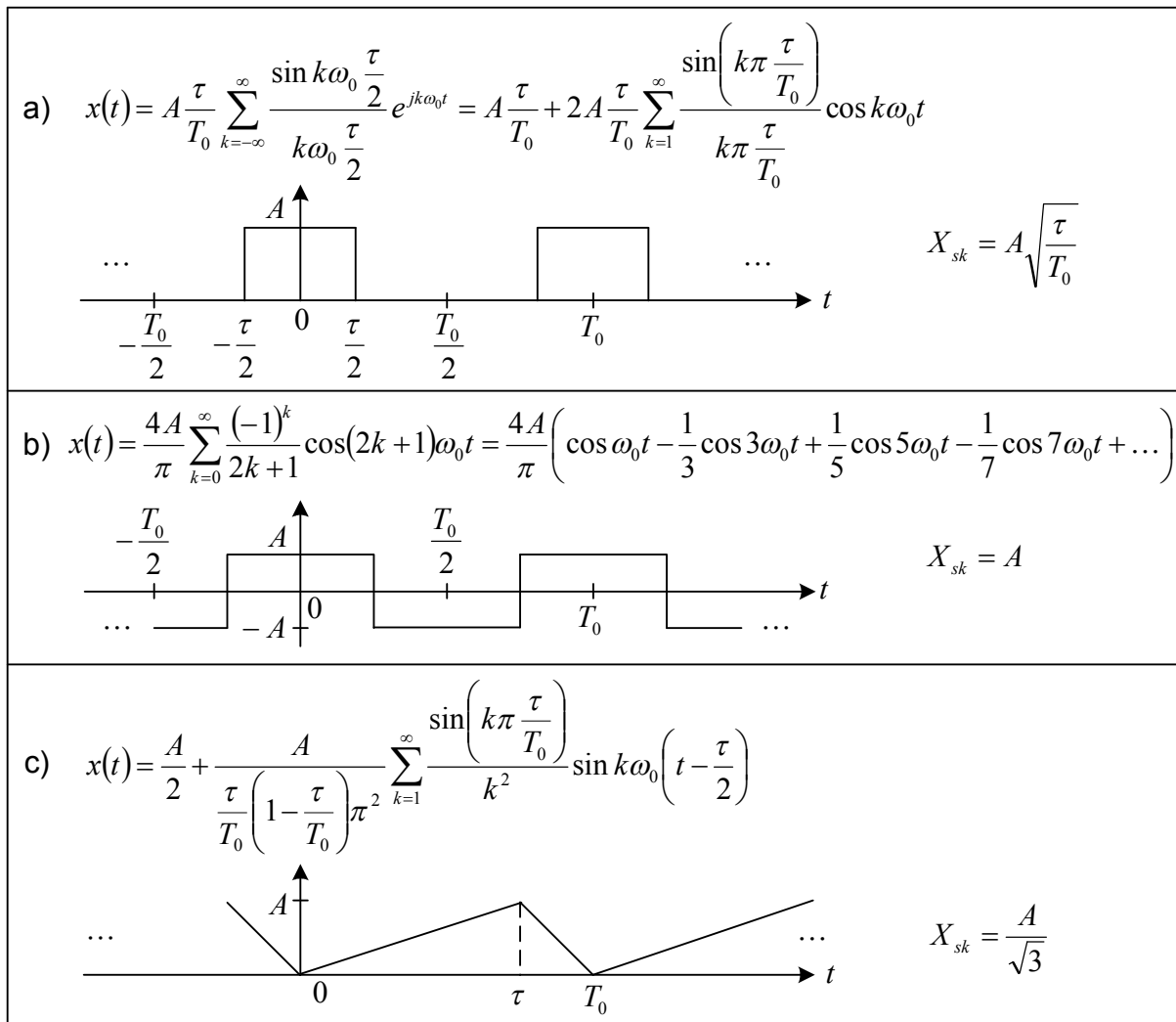
**Właściwość 7.** Jeżeli sygnał okresowy  $x(t)$  o zerowej wartości średniej  $D_0 = 0$  jest odcinkami ciągły, to w równości  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}$  można dwustronnie obliczyć całkę nieoznaczoną

$$y(t) = \int x(t) dt = E_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{D_k}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t}, \quad E_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) dt$$

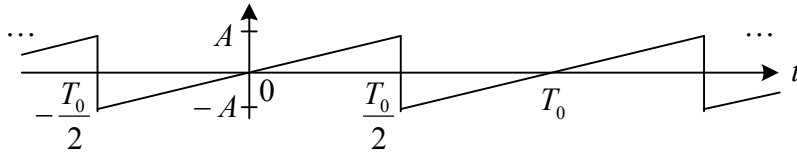
Całka z sygnału okresowego o zerowej wartości średniej  $\int x(t) dt$  daje sygnał okresowy  $y(t)$  taki, że  $y'(t) = x(t)$ .

**Właściwość 8.** Ze zmianą okresu  $T_0$  sygnału okresowego  $x(t)$  nie zmienia się wysokość prążków widma amplitudowego i fazowego, a zmienia się jedynie skala na osi częstotliwości.

Szeregi Fouriera ważniejszych sygnałów okresowych

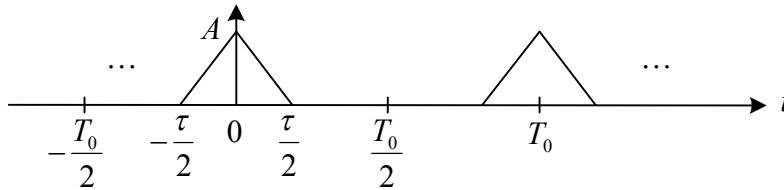


d) 
$$x(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k\omega_0 t = \frac{2A}{\pi} \left( \sin \omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t - \frac{1}{4} \sin 4\omega_0 t + \dots \right)$$



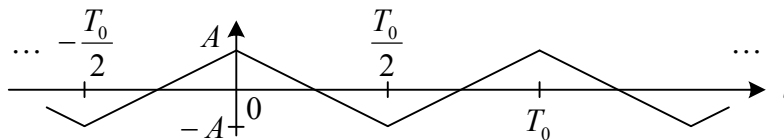
$$X_{sk} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

e) 
$$x(t) = \frac{A\tau}{2T_0} + \frac{2A\tau}{\pi^2 T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(k\pi \frac{\tau}{T_0}\right)}{k^2} \cos k\omega_0 t$$



$$X_{sk} = A \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\tau}{T_0}}$$

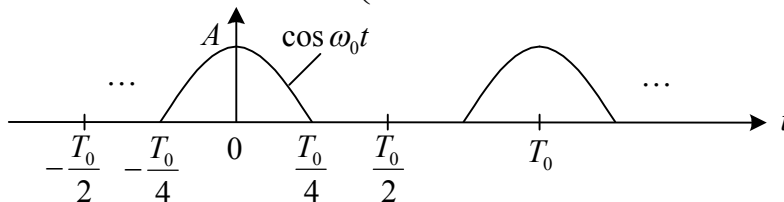
f) 
$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\omega_0 t = \frac{8A}{\pi^2} \left( \cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 t + \frac{1}{49} \cos 7\omega_0 t + \dots \right)$$



$$X_{sk} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

g) 
$$x(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \cos \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \cos 2k\omega_0 t =$$
  

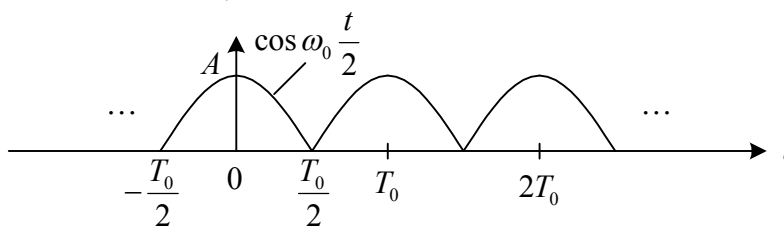
$$= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \cos \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{15} \cos 4\omega_0 t + \frac{1}{35} \cos 6\omega_0 t - \frac{1}{63} \cos 8\omega_0 t + \dots \right)$$



$$X_{sk} = \frac{A}{2}$$

h) 
$$x(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \cos k\omega_0 t =$$
  

$$= \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos \omega_0 t - \frac{1}{15} \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{35} \cos 3\omega_0 t - \frac{1}{63} \cos 4\omega_0 t + \dots \right)$$



$$X_{sk} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$



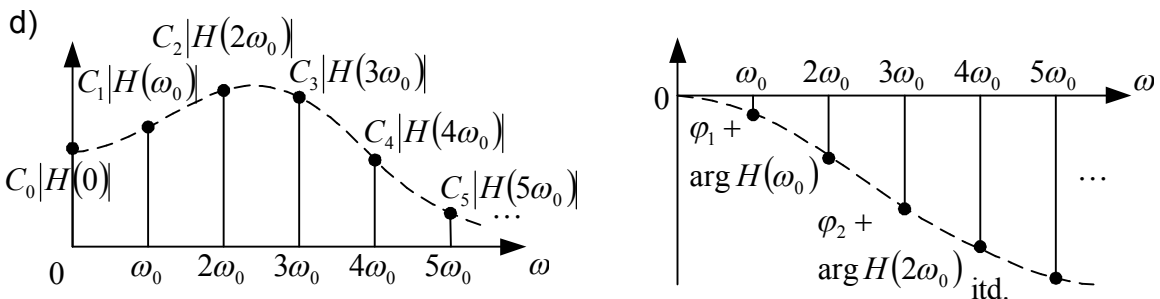
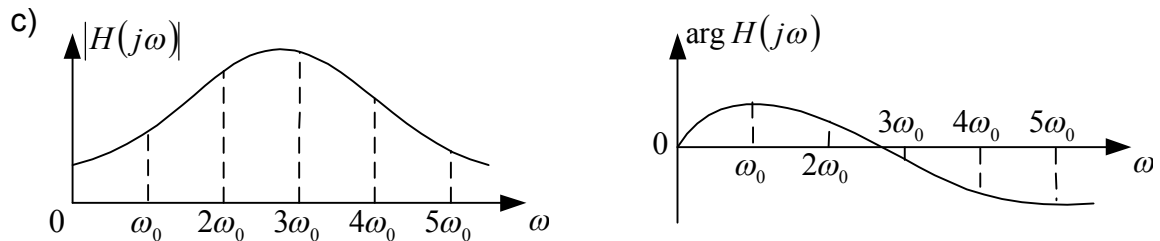
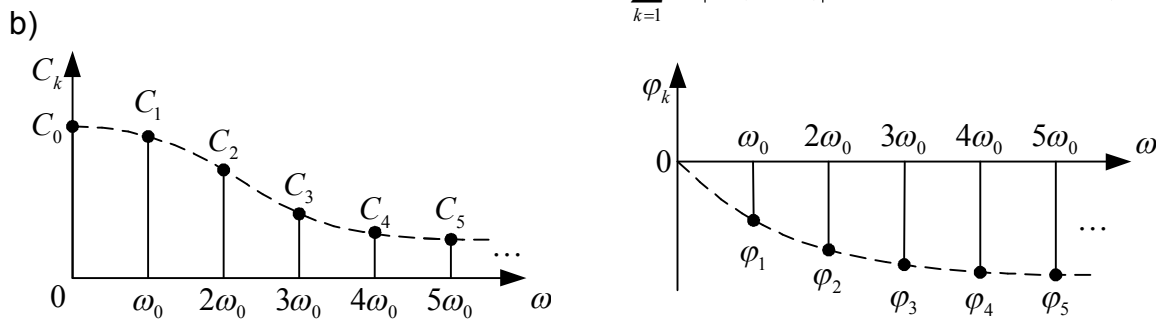
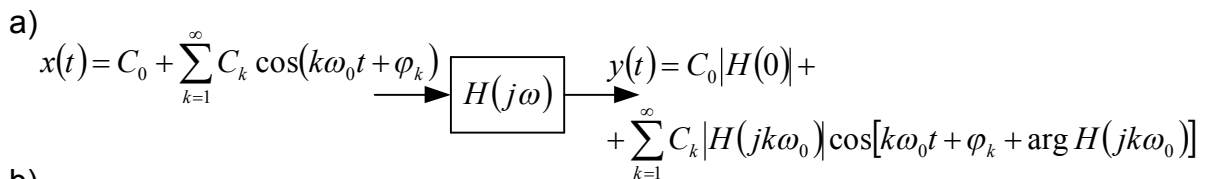
### Sygnały okresowe w układach liniowych

Sygnał sinusoidalny  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$ , przechodząc przez układ liniowy o transmitancji  $H(j\omega)$ , zmienia swoją amplitudę i fazę o wartości zależne od wartości transmitancji na pulsacji  $\omega_0$  sygnału sinusoidalnego:  $y(t) = A \cdot |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi_x + \arg H(j\omega_0)]$ .

Wejściowy sygnał okresowy przedstawiony w postaci szeregu Fouriera jest sumą sygnałów sinusoidalnych, a układ liniowy spełnia zasadę superpozycji. Dlatego dla okresowego sygnału

wejściowego  $x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ , układ ma odpowiedź o następującej postaci

$$y(t) = C_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k |H(jk\omega_0)| \cos[k\omega_0 t + \varphi_k + \arg H(jk\omega_0)]$$



Widma sygnałów okresowych w układzie liniowym: a) transmisja sygnału w układzie; b) widmo sygnału wejściowego; c) charakterystyki częstotliwościowe układu; d) widmo sygnału wyjściowego

#### Przykład 57