Reprezentacje widmowe i czasowo częstotliwościowe sygnałów

Katedra Systemów Multimedialnych
Politechnika Gdańska
Multimedia Systems Department
Gdansk University of Technology

Paweł Żwan

Reprezentacje sygnału

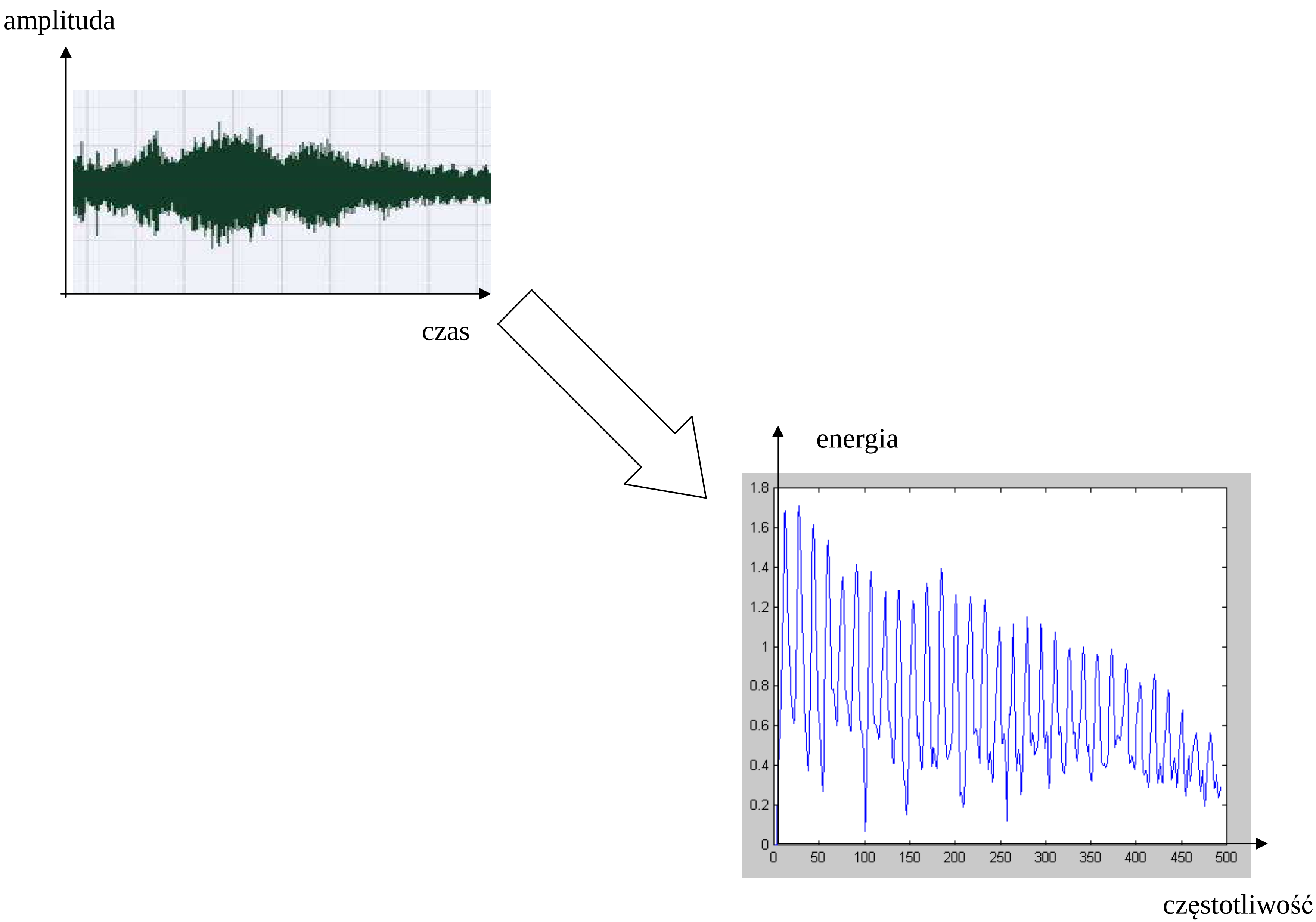
Widmowe

Discrete **F**ourier **T**ransform
Discrete **C**osine **T**ransform

Czasowo – częstotliwościowe

Transformacja Gabora
Transformacja Falkowa
Analiza McAulay - Quatieri

WIDMO STATYCZNE SYGNAŁU

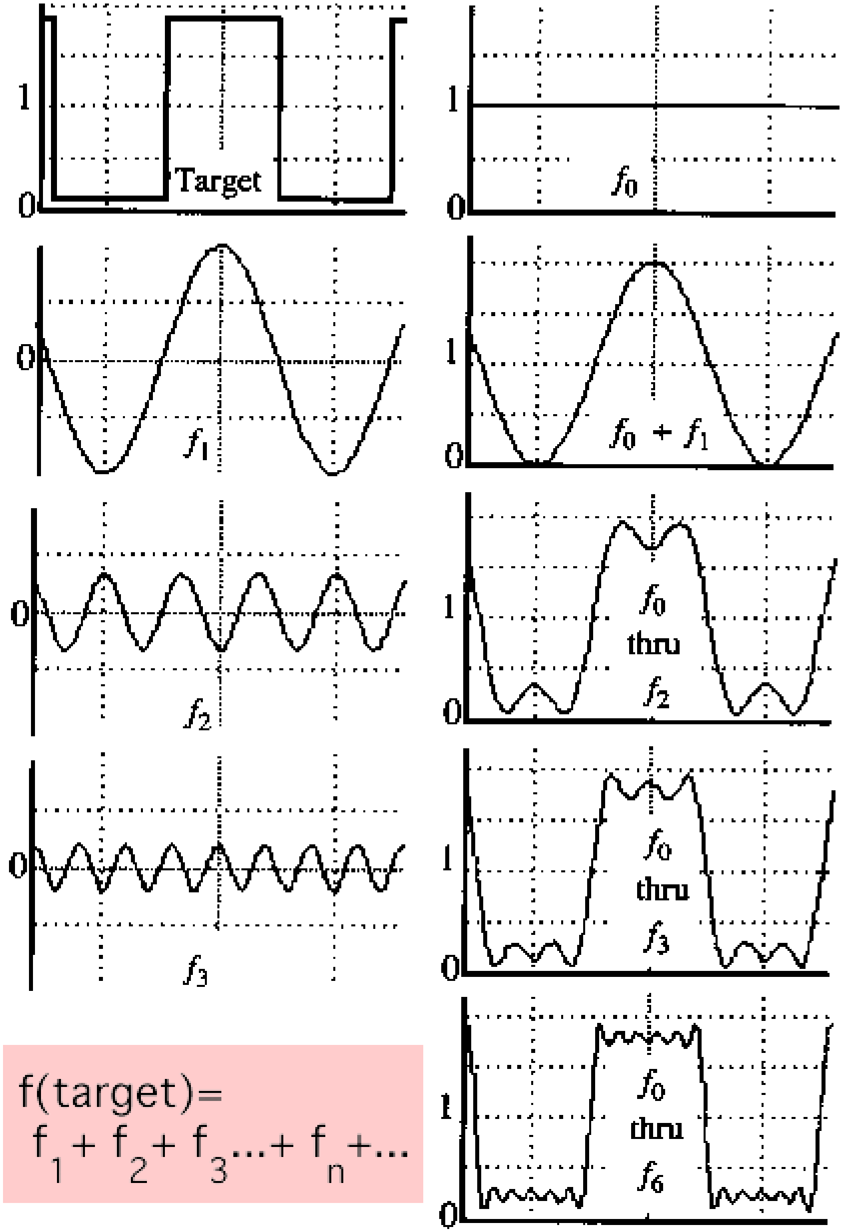


Jean Baptiste Fourier (1768-1830)

- had crazy idea (1807):
- ***Any*** *periodic function can be rewritten as a weighted sum of sines and cosines of different frequencies.*
- Don't believe it?
  - Neither did Lagrange, Laplace, Poisson and other big wigs
  - Not translated into English until 1878!
- But it's true!
  - called Fourier Series

A sum of sines

- Our building block:
- $$A\sin(\omega x+\phi)$$
- Add enough of them to get any signal *f(x)* you want!



f(target)=
$f_1 + f_2 + f_3 ... + f_n + ...$

Fourier Transform

- We want to understand the frequency ω of our signal. So, let's reparametrize the signal by ω instead of x:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Fourier Transform}} \longrightarrow F(\omega)$$

- For every ω from 0 to inf, $F(\omega)$ holds the amplitude A and phase ϕ of the corresponding sine $A\sin(\omega x + \phi)$
  - How can F hold both? Complex number trick!

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

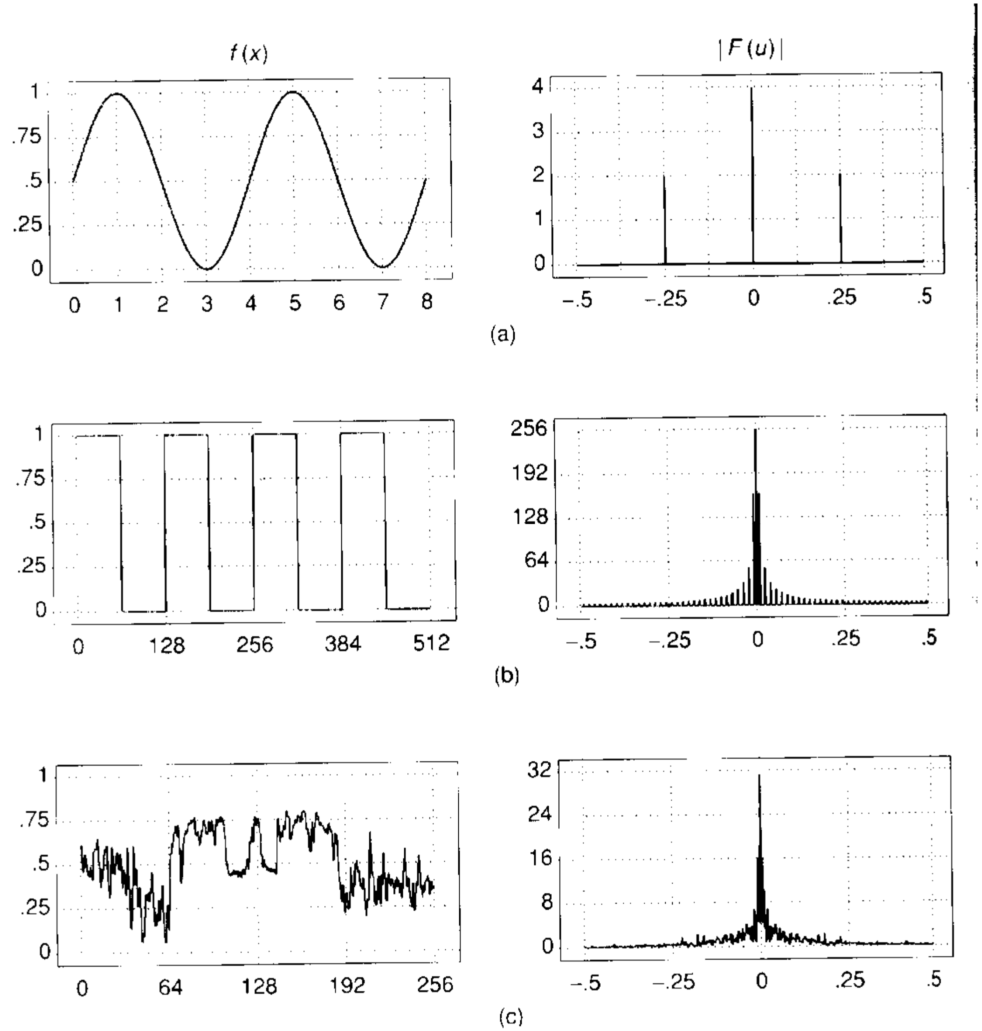
$$A = \pm\sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

We can always go back:

$$F(\omega) \longrightarrow \boxed{\text{Inverse Fourier Transform}} \longrightarrow f(x)$$

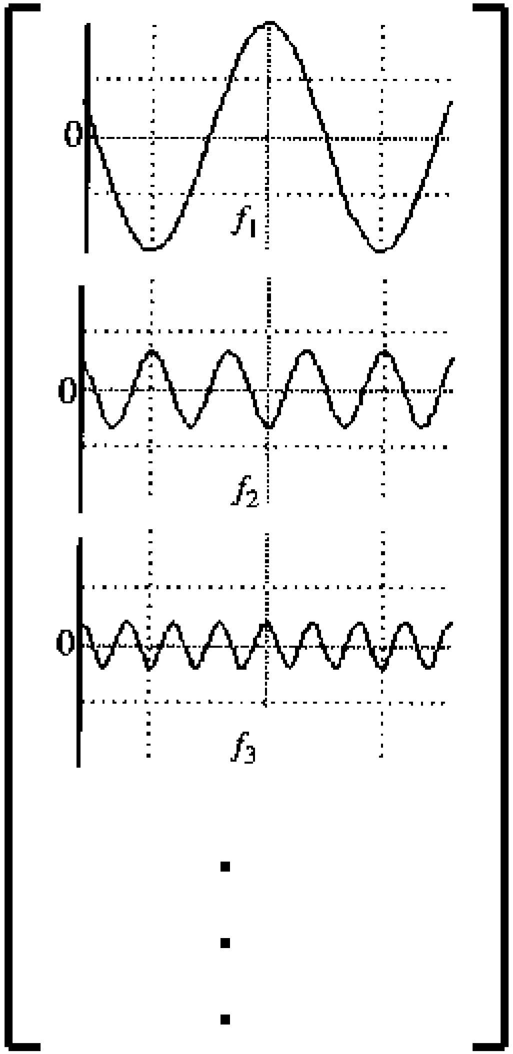
Frequency Spectra

- Usually, amplitude is more interesting than phase:

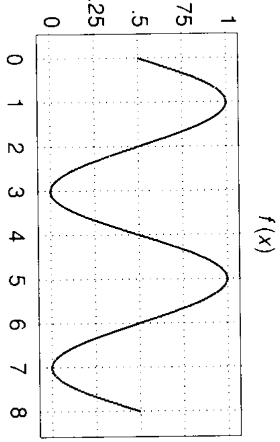


FT: Just a change of basis

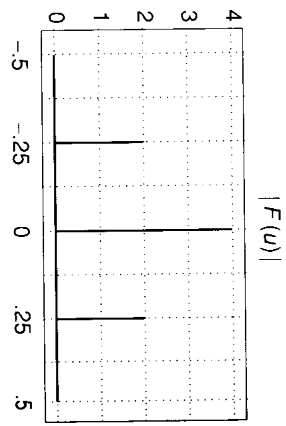
$$M * f(x) = F(\omega)$$



*



=



DFT

$$X(k) = \sum_{j=1}^{N} x(j)\omega_N^{(j-1)(k-1)}$$

$$\omega_N = e^{(-2\pi i)/N}$$

$$x(j) = (1/N)\sum_{k=1}^{N} X(k)\omega_N^{-(j-1)(k}$$

Widmo zespolone
(amplituda i faza)

DCT

$$y(k) = w(k)\sum_{n=1}^{N} x(n)\cos\frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2N}, \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & k = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 2 \le k \le N \end{cases}$$

$$x(n) = w(n)\sum_{k=1}^{N} y(k)\cos\frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2N}, \qquad n = 1, \ldots, N$$

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & n = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 2 \le n \le N \end{cases}$$

Widmo rzeczywiste
o dwukrotnie lepszej rozdzielczości

Szybka Transformata Fouriera (FFT – Fast Fourier Transform)

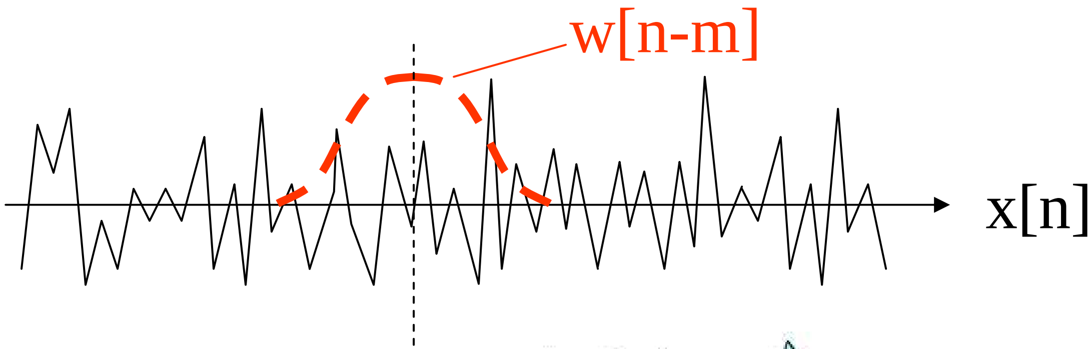
- Jest algorytmem liczenia DFT
- Jej złożoność obliczeniowa jest wiele mniejsza

$$O(N\log_2 N), \quad \text{zamiast } O(N^2)$$

- Próbkowany sygnał musi mieć długość rzędu gdzie k jest liczbą naturalną

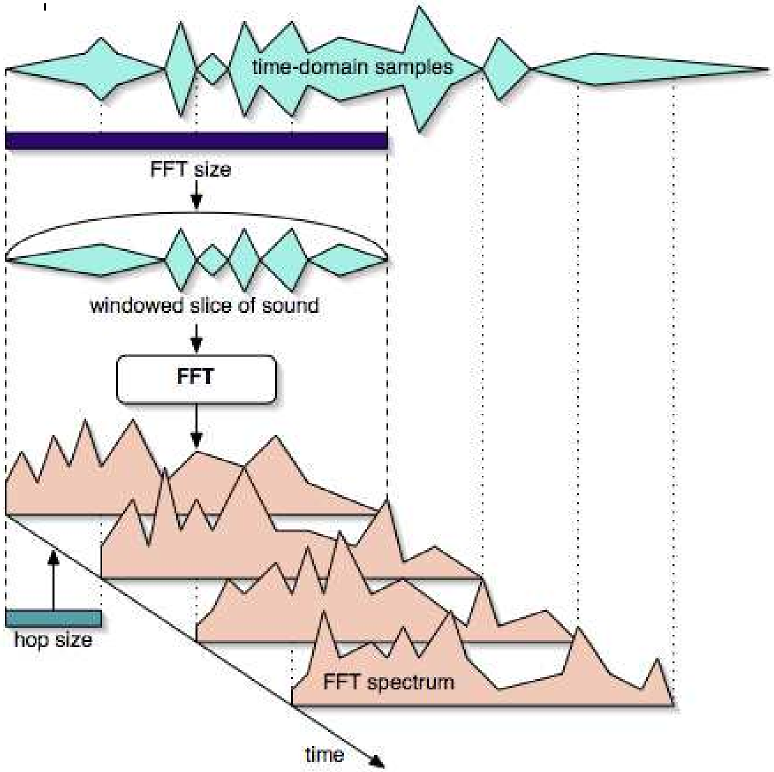
$$N = 2^k$$

STFT – Short-term Fourier Transform

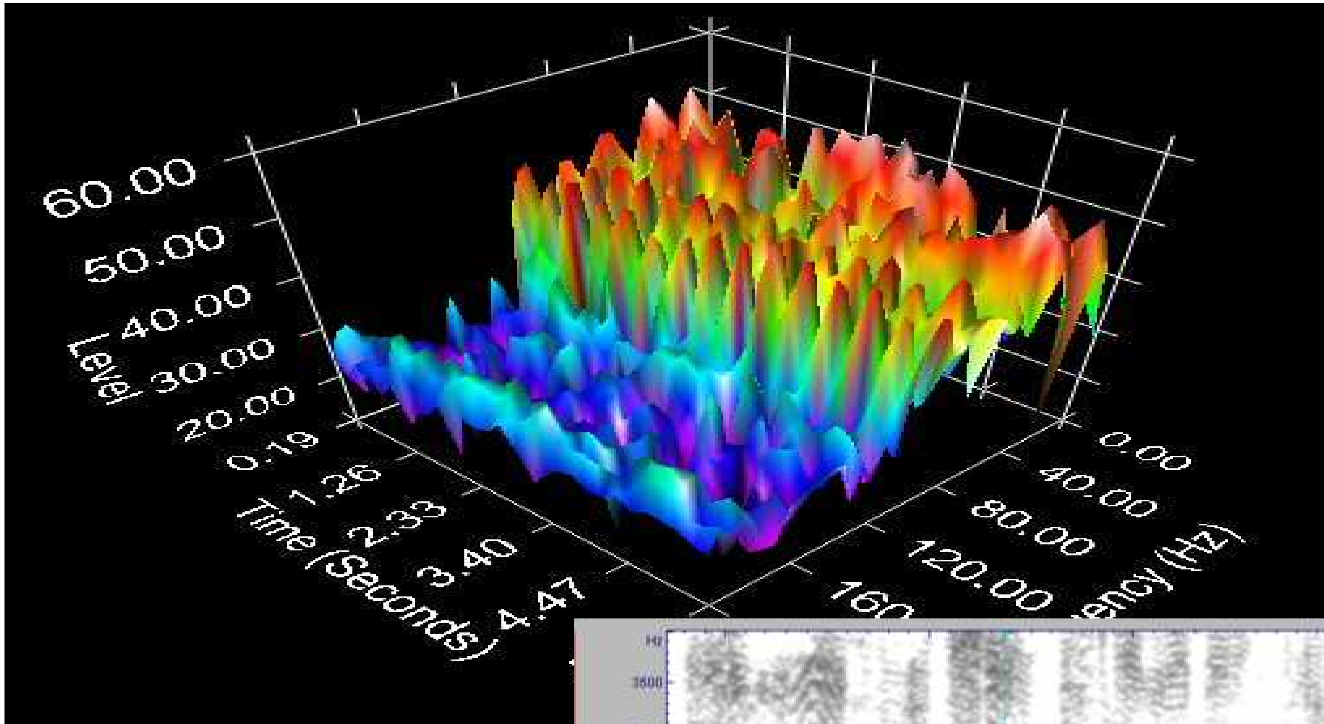


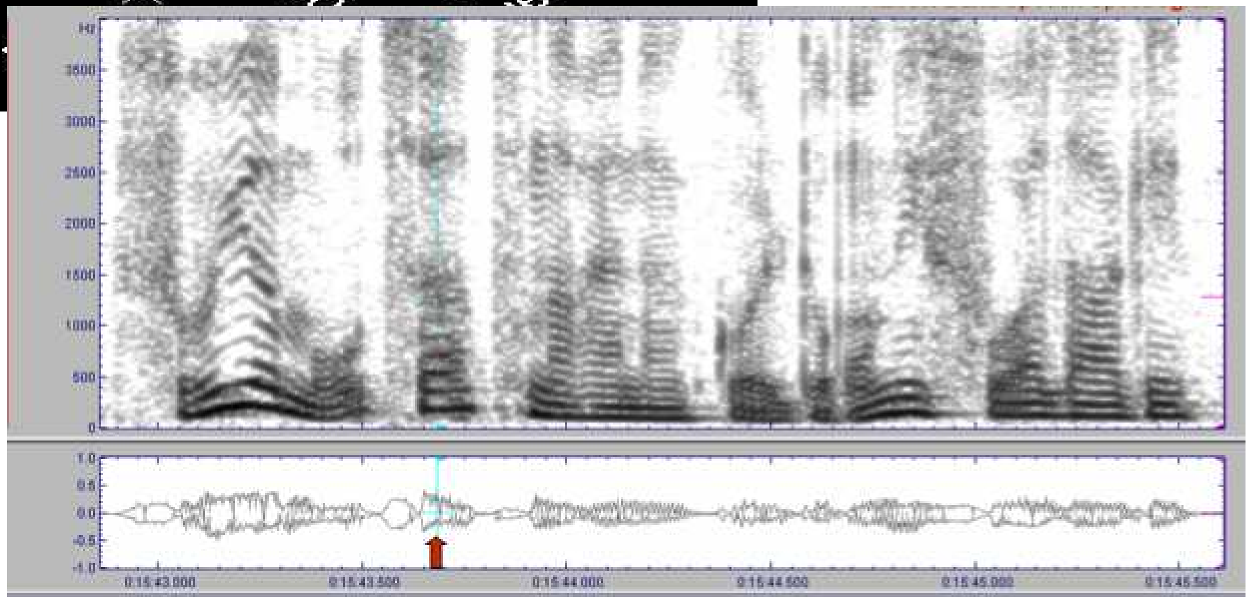
Uwarunkowania i niedogodności:

- Przyjęcie stacjonarności Sygnału w ramkach analizy
- Zależność rozdzielczości od wielkości okna analizy (dla wszystkich częstotliwości rozdzielczość taka sama)
- Brak możliwości realizacji Transformacji odwrotnej



Wynik działania STFT - spektrogram





Łączne reprezentacje czasowo- częstotliwościowe
- analizowane sygnały są sygnałami niestacjonarnymi

<u>TRANSFORMACJA GABORA</u> – umożliwia rozłożenie sygnału dyskretnego na kombinację liniową przesuniętych i modulowanych funkcji Gaussa. Funkcje Gaussa są **funkcjami analizującymi**.

<u>TRANSFORMACJA FALKOWA</u> – duża rozdzielczość w dziedzinie czasu (szybkozmienne składowe) i mała rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości (wolnozmienne składowe).
Jądrem przekształcenia jest falka macierzysta (ang. Mother wavelet)
Która jest przeskalowywana i przesuwana w dziedzinie czasu.
W ten sposób definiowane są falki analizujące i stanowią zestaw funkcji analizujących.

Metoda analizy sygnału metodą **McAulay – Quatieri**
- sygnał wejściowy dzielony jest na zachodzące na siebie bloki (zakładkowanie)